Übungen Biomathematik und Spieltheorie 2016

Aufgabe 1.

a) Die Auszahlungsmatrix $\mathbf{A}$ eines Spiels mit 2 reinen Strategien A und B ist

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array}. \tag{1}$$

Gib einen Fall an, in dem das Spiel sowohl ein striktes als auch ein nicht-striktes Nash Gleichgewicht hat. Wie viele (starke oder schwache) ESS hat das Spiel dann (mit Begründung)?

b) Wie viele Nash Gleichgewichte (strikt und nicht strikt) und evolutionär stabile Strategien (schwach oder stark) haben die folgenden Spiele? (mit Beweis)

$$(i) \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (ii) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

c) Kann es in einem Spiel mit einem gemischten Zustand als ESS auch noch ein striktes Nash Gleichgewicht geben? (mit Beweis)

d) Im Spiel *Schere-Stein-Papier-Brunnen* spielen Schere, Stein und Papier wie gewohnt gegeneinander. Dazu gewinnt Brunnen gegen Stein und Schere ("fallen hinein"), verliert aber gegen Papier ("deckt den Brunnen ab"). Geben Sie die *payoff* Matrix an. Gibt es bei diesem Spiel ein Nash-Gleichgewicht? Wenn ja, welches? In Leserkommentaren zu einem Artikel im Standard über *Schere-Stein-Papier* wurde die Meinung geäußert, dass die Version mit *Brunnen* zwischen den Spielern nicht mehr fair sei, da einige Strategien bessere Chancen als andere hätten. Was sagen Sie zu dieser Ansicht?

Aufgabe 2. Betrachte das iterierte Gefangenendilemma mit Auszahlungsmatrix

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array} \tag{3}$$

mit der Relation $c > a > d > b$ und $2a > c + b$. Die Strategie *generous tit-for-tat-p* (GTFT-p) ist dadurch charakterisiert, dass sie

(i) In der ersten Runde immer kooperiert,

(ii) ab der zweiten Runde immer kooperiert, wenn der Gegenspieler in der vorhergehenden Runde kooperiert hat,

(iii) ab der zweiten Runde mit Wahrscheinlichkeit p kooperiert, wenn der Gegenspieler in der vorhergehenden Runde *nicht* kooperiert hat (mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ wird GTFT-p dann nicht kooperieren).

a) Wie lautet die Auszahlungsmatrix für den mittleren *payoff* von GTFT-p gegen *always defect* (ALLD) in einem m-Runden-Spiel?

b) Wie viele Runden $m = m_{\text{min}}$ müssen mindestens gespielt werden, damit bei gegebenem p GTFT-p noch ein Nash Gleichgewicht ist? Was ist das maximale $p = p_{\text{max}}$, dass GTFT-p bei festem m noch ein Nash Gleichgewicht ist? Gib jeweils die Werte für allgemeine a, b, c, d an und für das Beispiel $c = 5$, $a = 3$, $d = 1$, $b = 0$.

c) Betrachte nun eine endliche Population im Grenzfall schwacher Selektion und großer Populationsgröße. Was ist dann das maximale p, für das bei festem m die Fixation einer GTFT-p Mutation in einer ALLD Population von Selektion gefördert wird? Wie ist das im Fall $m \to \infty$? Betrachte wieder den allgemeinen Fall und das Beispiel $c = 5$, $a = 3$, $d = 1$, $b = 0$.

d) Beschreibe eine Strategie, die im m-Runden Spiel für jedes $p \in [0, 1]$ über die Strategie GTFT-p dominiert. Wie lautet die Auszahlungsmatrix für das m-Runden Spiel?