Biomathematik & Spieltheorie

Vorlesung 2020

Joachim Hermisson

Mathematics and Biosciences Group

Mathematik & MPL, Universität Wien

Übungsaufgaben

Aufgabe 3.2: Biologische Schädlingsbekämpfung

Aufgabe 4.1: Hassell Modell

Aufgabe 4.2: Ricker Harvesting Modell

Aufgabe 5.2: Verzweigungsprozess in kontinuierlicher Zeit

Übungsaufgaben

Aufgabe 3.2: Biologische Schädlingsbekämpfung

je m_n Weibchen und fruchtbare Männchen, s sterile Männchen pro Generation, $2r$ Nachkommen je fruchtbarer Paarung ($r > 1$)

a) Reproduktionsfunktion

$$m_{n+1} = F(m_n) = 2r\, m_n \frac{m_n}{m_n + s} \frac{1}{2} = \frac{r\, m_n^2}{m_n + s}$$

$$F'(m) = \frac{rm(m + 2s)}{(m + s)^2}$$

b) Fixpunkte und Stabilität

$$m^{*(1)} = 0 \qquad F'(0) = 0 \qquad \text{stabil}$$

$$m^{*(2)} = \frac{s}{r - 1} \qquad F'\left(m^{*(2)}\right) = \frac{2r - 1}{r} > 1 \qquad \text{instabil}$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 3.2: Biologische Schädlingsbekämpfung

je m_n Weibchen und fruchtbare Männchen, s sterile Männchen pro Generation, $2r$ Nachkommen je fruchtbarer Paarung ($r > 1$)

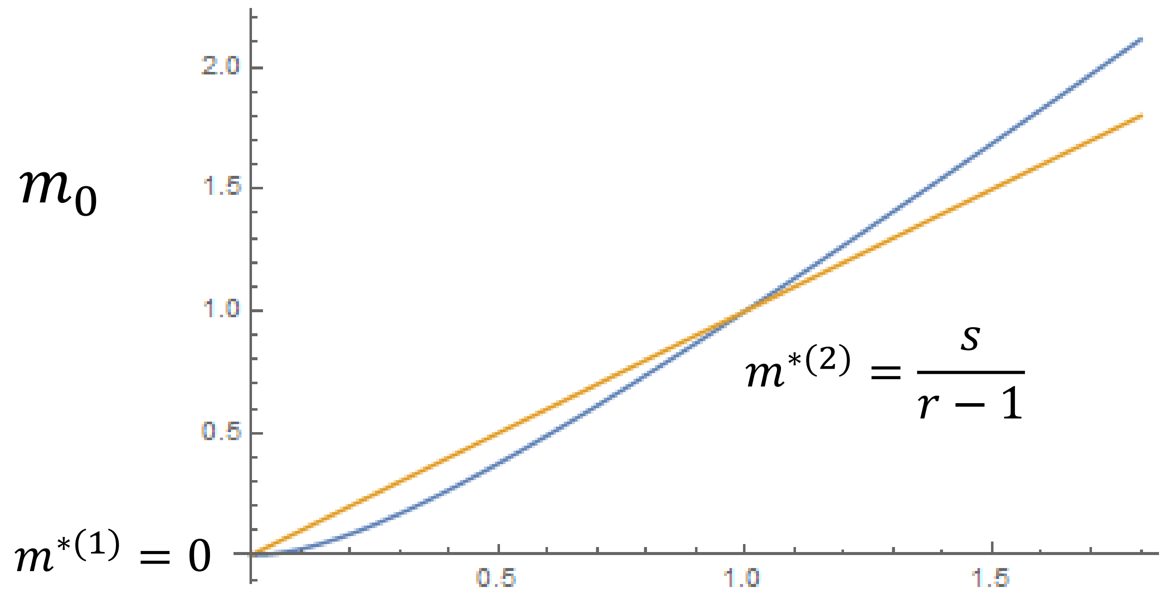
a) Reproduktionsfunktion

$$m_{n+1} = F(m_n) = 2r\, m_n \frac{m_n}{m_n + s} \frac{1}{2} = \frac{r\, m_n^2}{m_n + s}$$

c) minimales s:

$$m^{*(2)} = \frac{s}{r-1} > m_0$$

$$s > m_0(r-1)$$



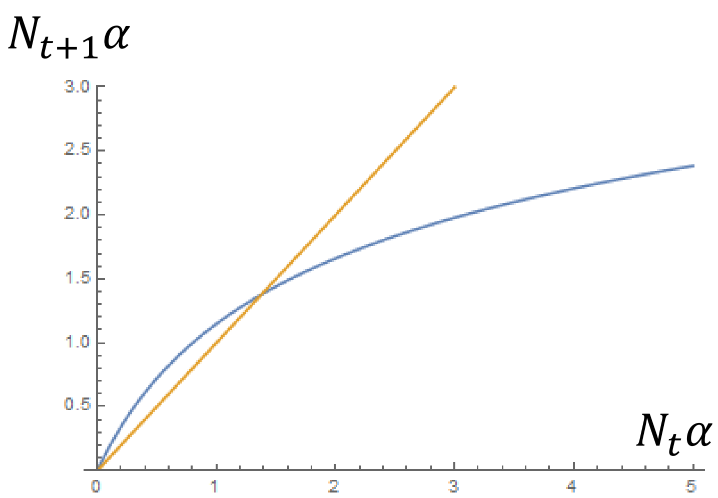
Übungsaufgaben

Aufgabe 4.1: Hassell Modell

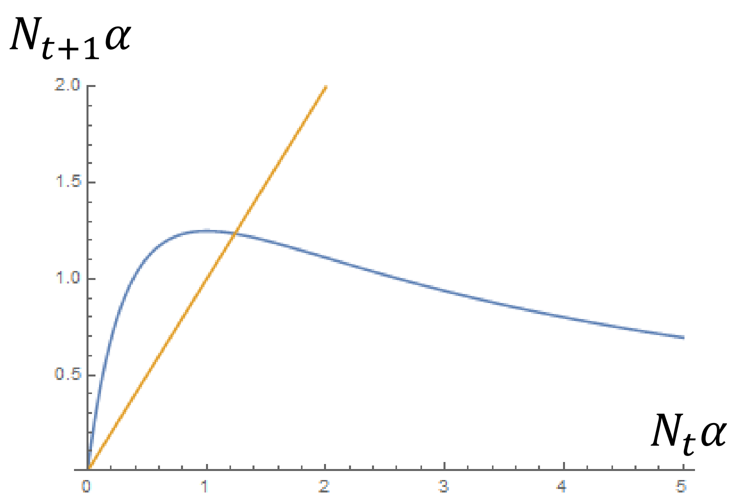
$$N_{t+1} = F(N_t) = \frac{\lambda N_t}{(1+\alpha N_t)^{\beta}} \qquad F'(N) = \frac{\lambda - \alpha\lambda(\beta-1)N}{(1+\alpha N)^{\beta+1}}$$

a) Fixpunkte und Stabilität

$N^{*(1)} = 0$ (immer instabil für $\lambda > 1$) $\qquad N^{*(2)} = \frac{\sqrt[\beta]{\lambda}-1}{\alpha} > 0$



$\beta \leq 1$



$\beta > 1$

Übungsaufgaben

Aufgabe 4.1: Hassell Modell $F(N) = \dfrac{\lambda N}{(1+N)^\beta}$

$$F'\left(N^{*(2)}\right) = \frac{\lambda - \lambda(\beta-1)\left(\sqrt[\beta]{\lambda}-1\right)}{\left(1+\sqrt[\beta]{\lambda}-1\right)^{\beta+1}} = \frac{\beta - \sqrt[\beta]{\lambda}(\beta-1)}{\sqrt[\beta]{\lambda}}$$

$N^{*(2)}$ oszillierend für

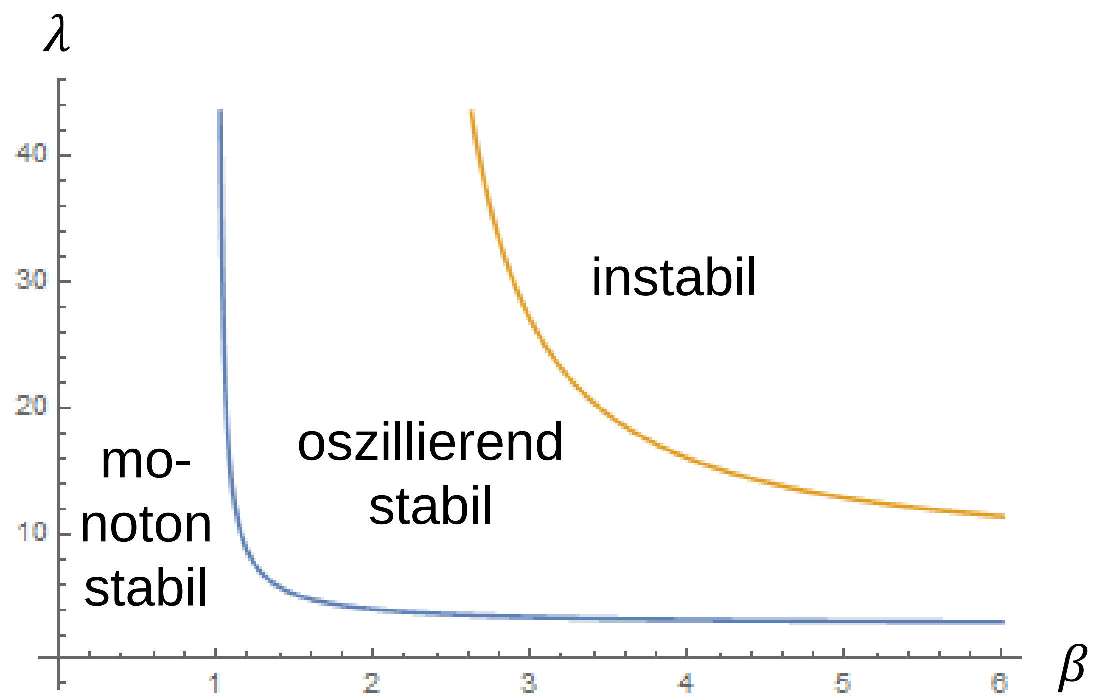
$$F'\left(N^{*(2)}\right) < 0$$

$$\Rightarrow \lambda > \left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)^\beta$$

$N^{*(2)}$ instabil für

$$F'\left(N^{*(2)}\right) < -1$$

$$\Rightarrow \lambda > \left(\frac{\beta}{\beta-2}\right)^\beta$$

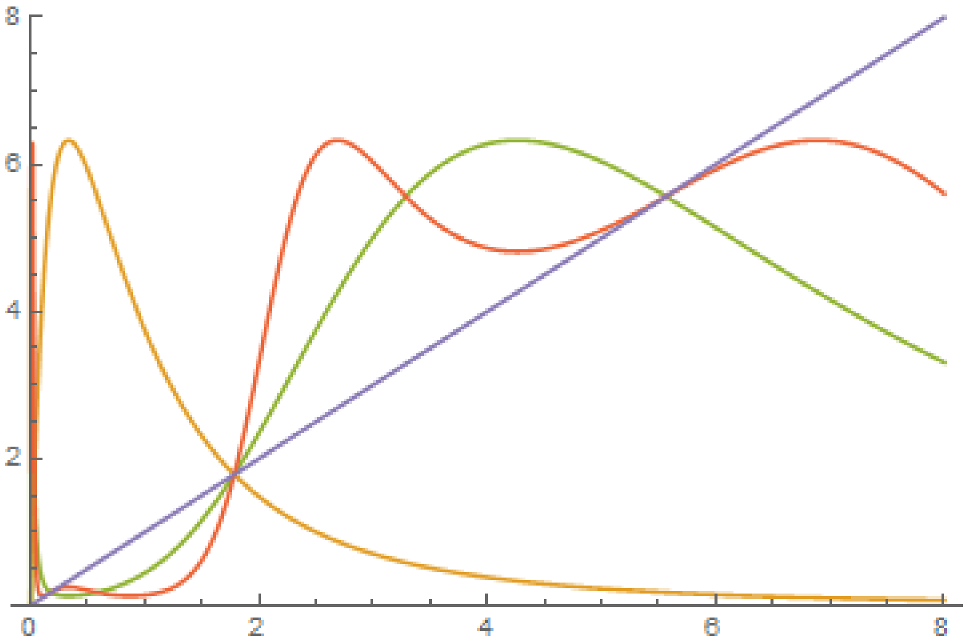


Übungsaufgaben

Aufgabe 4.1: Hassell Modell $F(N) = \dfrac{\lambda N}{(1+N)^{\beta}}$

$$F^2(N) = \frac{\lambda^2 N/(1+N)^{\beta}}{(1+\lambda N/(1+N)^{\beta})^{\beta}} = \frac{\lambda^2 N}{(1+N+\lambda N(1+N)^{1-\beta})^{\beta}}$$

$\lambda = 60$
$\beta = 4$

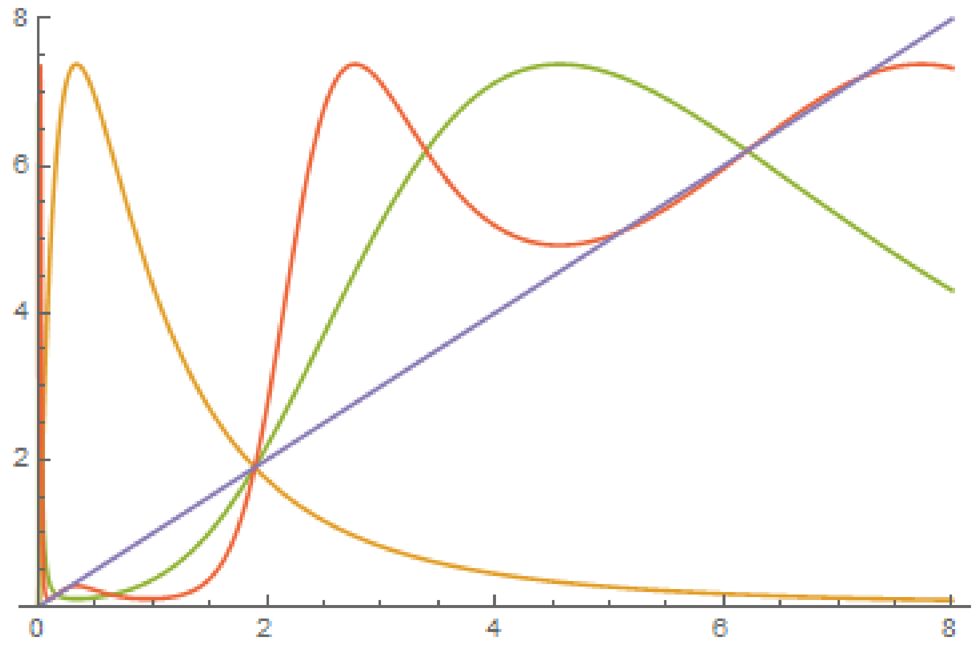


Übungsaufgaben

Aufgabe 4.1: Hassell Modell $$F(N) = \frac{\lambda N}{(1+N)^{\beta}}$$

$$F^2(N) = \frac{\lambda^2 N/(1+N)^{\beta}}{(1+\lambda N/(1+N)^{\beta})^{\beta}} = \frac{\lambda^2 N}{(1+N+\lambda N(1+N)^{1-\beta})^{\beta}}$$

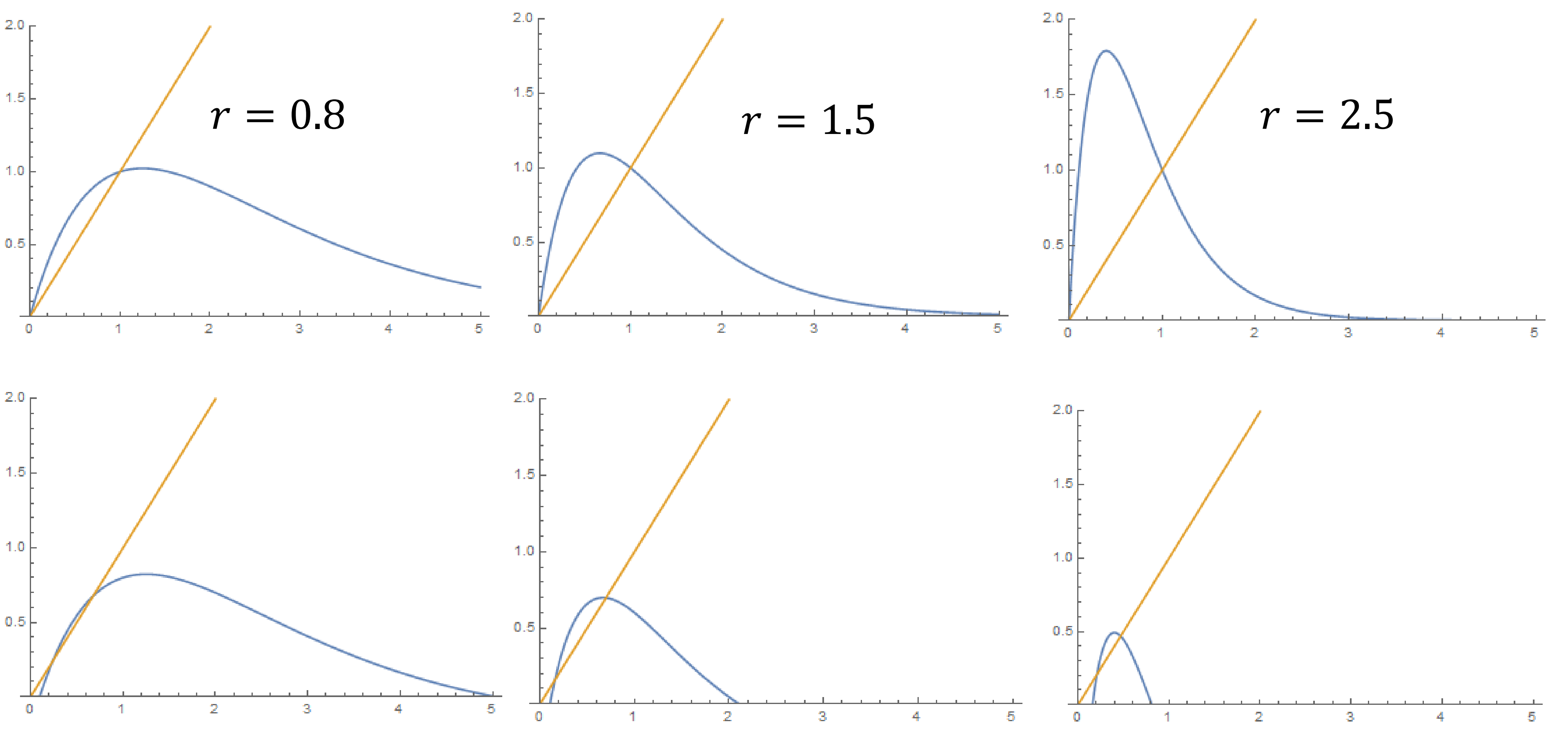
$\lambda = 70$
$\beta = 4$



Übungsaufgaben

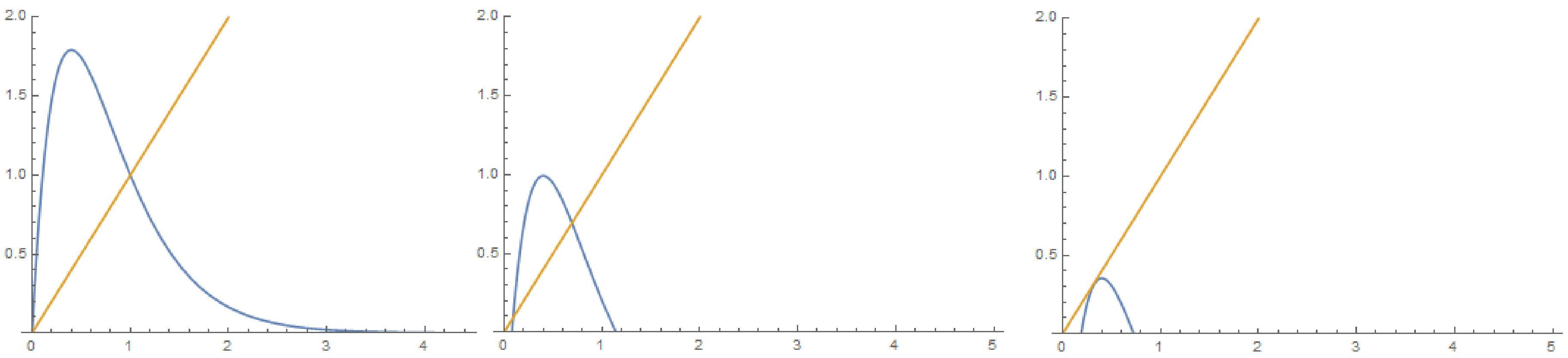
Aufgabe 4.2: Ricker Harvesting Modell

$$F(N) = N\exp[r(1-N)] - Y$$



Übungsaufgaben

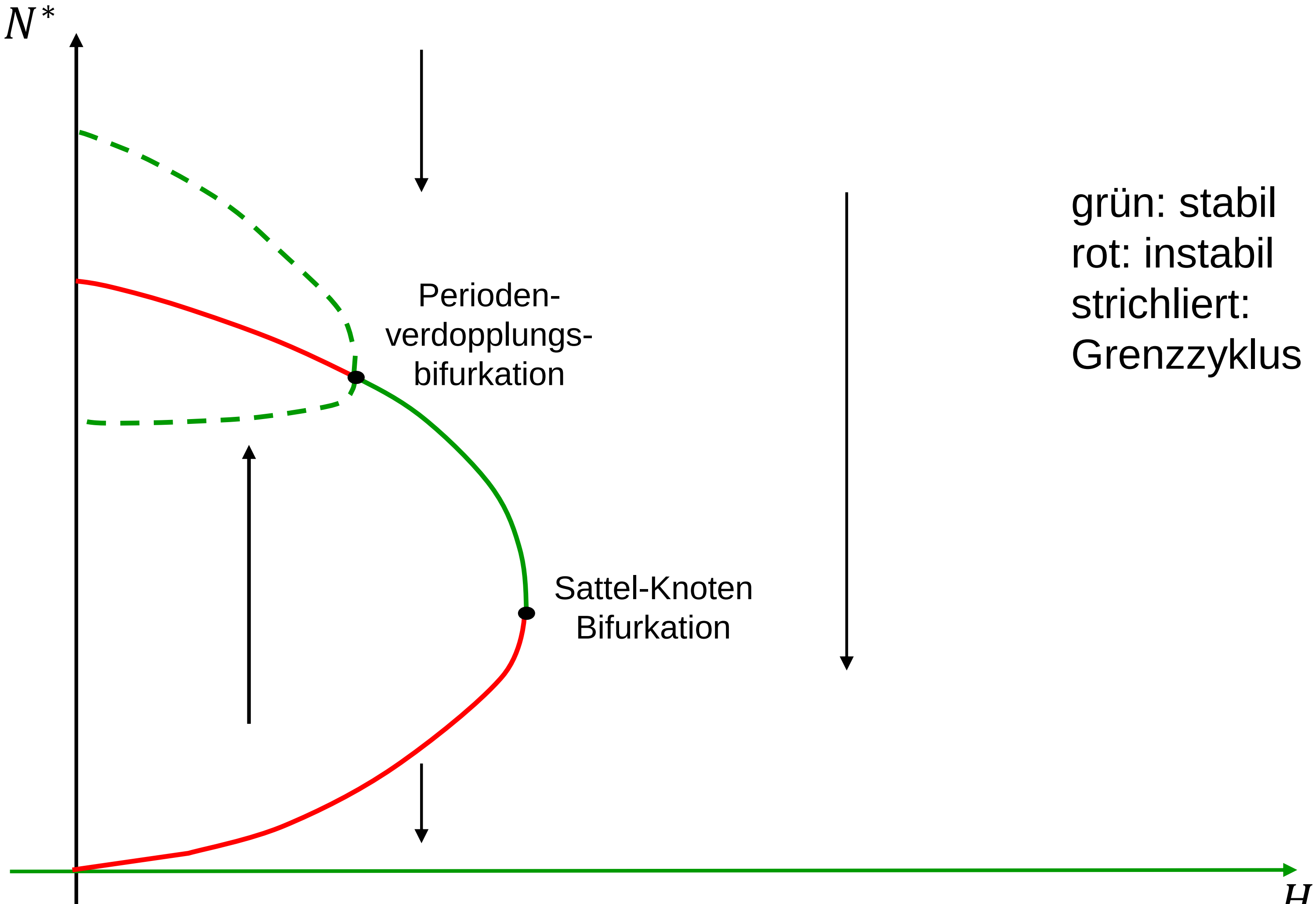
Aufgabe 4.2: Ricker Harvesting Modell



$$F'\left(N^{(Y)}\right) = \left(1 - rN^{(Y)}\right) \exp\left[r\left(1 - N^{(Y)}\right)\right] \overset{!}{=} 1$$

$$MSY = F\left(N^{(Y)}\right) - N^{(Y)}$$

Schematisches Bifurkationsdiagramm
Ricker mit Harvesting



grün: stabil
rot: instabil
strichliert: Grenzzyklus

Übungsaufgaben

Aufgabe 5.2: Verzweigungsprozess in kontinuierlicher Zeit

gegeben: Geburtenrate b, Todesrate d

a) Wahrscheinlichkeit für Geburt oder Tod als nächstes Ereignis

$$\frac{p_b}{p_d} = \frac{b}{d}\ ; \quad p_b + p_d = 1 \quad \Rightarrow \quad p_b = \frac{b}{b+d}\ ; \quad p_d = \frac{d}{b+d}$$

b) Aussterbewahrscheinlichkeit

Rekursion: $\pi_\infty = p_d + p_b \cdot \pi_\infty^2$

$$\pi_\infty = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p_d p_b}}{2p_b} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p_b + 4p_b^2}}{2p_b} = \frac{1 \pm (1 - 2p_b)}{2p_b}$$

$$\pi_\infty^{(1)} = 1; \quad \pi_\infty^{(2)} = \frac{1 - p_b}{p_b} = \frac{d}{b}$$

(Aussterbewahrscheinlichkeit für $d < b$)

Übungsaufgaben

Aufgabe 5.2: Verzweigungsprozess in kontinuierlicher Zeit

gegeben: Geburtenrate b, Todesrate d

a) Wahrscheinlichkeit für Geburt oder Tod als nächstes Ereignis

$$\frac{p_b}{p_d} = \frac{b}{d}\ ; \quad p_b + p_d = 1 \quad \Rightarrow \quad p_b = \frac{b}{b+d}\ ; \quad p_d = \frac{d}{b+d}$$

b) Aussterbewahrscheinlichkeit

Rekursion: $\pi_n = p_d + p_b \cdot \pi_{n-1}^2$

$$\pi_\infty^{(2)} = \frac{d}{b}$$