Spieltheorie und Biomathematik

Joachim Hermisson

January 7, 2015

Spieltheorie

Was ist Spieltheorie?

Jonathan Haidt: *How would you explain human behavior in less than two seconds: "self-interest".*

Der Egoismus oder Eigennutz hat in der Geschichte der Ökonomie und politischen Philosophie ein wechselhaftes Ansehen. Ursprünglich gilt er als Sünde und auch für die Gesellschaft als schädlich. So erscheint er bei Thomas Hobbes (Leviathan 1651) als zerstörerische Kraft, die zum Krieg aller gegen alle führt (*homo hominem lupus*) und durch eine zentrale Autorität unter Kontrolle gehalten werden muss. Gut 100 Jahre später kommt der Begründer der Nationalökonomie Adam Smith zu einem entgegengesetzten Urteil (Wealth of Nations 1776): Smith geht von empirischen Beobachtungen aus und folgert: Wenn alle Individuen danach streben, ihren eigenen Vorteil zu maximieren, wird dadurch in einer Gesellschaft auch das Gesamtwohl maximiert – wenn auch unbeabsichtigt und quasi als Nebeneffekt. Dies ist das Resultat der "unsichtbaren Hand" des Marktgeschehens. Insbesondere ist Egoismus ein sehr viel wirksamerer Motor zur Steigerung des Gesamtwohls als Altruismus. Dieser Gedanke ist bis heute ein Grundpfeiler fast aller Theorien der freien Marktwirtschaft.

Wenn wir die Konsequenzen von egoistischem Verhalten beurteilen wollen, so stellt sich zunächst die Frage: Wie würden sich rationale Individuen in komplexen Entscheidungssituationen verhalten, wenn sie letztlich einzig versuchen, ihren eigenen Gewinn zu maximieren? Im Sinne des obigen Zitats von *Haidt* sollte dies bereits zu einer respektablen Theorie des menschlichen Verhaltens führen. Die Spieltheorie bietet einen mathematischen Rahmen, innerhalb dessen sich eine solche Theorie entwickeln lässt. Sie wurde zu diesem Zweck Mitte des 20ten Jahrhunderts von John von Neumann und Oskar Morgenstern begründet (Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten, 1944).

- Eine komplexe Entscheidungssituation liegt dann vor, wenn das Ergebnis (der Gewinn für alle Akteure) nicht nur von der eigenen Entscheidung abhängt, sondern von der Entscheidung aller Mitspieler.

- Eine Antwort auf die Frage nach der optimalen Strategie liefert die Theorie des Nash-Gleichgewichts (John F. Nash, 1950).

- Weiterentwicklungen der Spieltheorie umfassen insbesondere die *evolutionäre Spieltheorie* (John Maynard Smith 1973, J. Hofbauer, K. Sigmund).

- Die Spieltheorie hat heute insbesondere in den Wirtschaftswissenschaften großen Einfluss. Bis heute wurden nicht weniger als 8 Wirtschafts-Nobelpreise für Forscher aus dem Gebiet vergeben (u.a. John Nash).

Das Gefangenendilemma (Prisoner's dilemma)

Zwei Personen werden verdächtigt, eine Bank ausgeraubt zu haben, aber abgesehen von illegalem Waffenbesitz kann die Staatsanwaltschaft ihnen bisher nichts nachweisen. Damit sie sich nicht absprechen können, werden sie in der Untersuchungshaft strikt getrennt gehalten und einzeln verhört. Die Staatsanwaltschaft bietet beiden eine Kronzeugenregelung an. Der Straferlass für den Kronzeugen richtet sich nach der Bedeutung seiner Aussage im Verfahren. Vollen Straferlass bekommt er genau dann, wenn seine Aussage für die Anklagevertreter entscheidend und alternativlos ist. Wenn die Anklage sich alternativ auf mehrere Aussagen (oder andere Beweise) stützen kann, darf ein geständiger Angeklagter immerhin noch auf eine Reduktion seiner Strafe hoffen.

Das erwartete Strafmaß für illegalen Waffenbesitz bewegt sich bei einem Jahr. Ein nicht geständiger Bankräuber muss mit 10 Jahren Haft rechnen, ein geständiger Räuber mit sieben Jahren. Was sollte ein Verdächtiger in einer solchen Situation tun?

Im der Terminologie der Spieltheorie haben beide Akteure je zwei (reine) Strategien zur Verfügung:

- untereinander zu kooperieren (*cooperate*), also: nicht gestehen;

- die Kooperation zu verweigern (*defect*), also: gestehen und den anderen verraten.

Das Resultat jeder dieser Strategien hängt aber vom Verhalten des anderen ab. Man kann dies in einer sogenannten Auszahlungsmatrix (*payoff matrix*) zusammenfassen:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \end{array}, \tag{1}$$

wobei C und D für *cooperate* und *defect* stehen. Die eigene Strategie entscheidet über die Zeile des Matrixeintrags, die des Mitspielers (Mitangeklagten) über die Spalte. Formal kann ich die Strategien als Vektoren schreiben: $(1, 0)$ für *cooperate* und $(0, 1)$ für *defect*. Wenn meine Strategie durch den Vektor $\mathbf{p}$ gegeben ist und die Strategie des Mitangeklagten durch den Vektor $\mathbf{q}$, dann ergibt sich meine "Auszahlung" als das Skalarprodukt

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}\mathbf{q}$$

und die Auszahlung für den Mitangeklagten als

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{A}\mathbf{p}\,.$$

Es stellt sich die Frage nach der optimalen Strategie. Über die Wahl des Mitspielers habe ich keine Information. Dennoch erscheint eine rationale Entscheidung beim Gefangenendilemma einfach: unabhängig von der Strategie des anderen werde ich immer mit der Entscheidung für *defect* (also verraten), $\mathbf{p} = (0, 1)$, besser fahren. Da dies für beide gilt, haben wir $\mathbf{p} = \mathbf{q} = (0, 1)$, und beide Angeklagte sehen sie sich alsbald für 7 Jahre in Haft. Und das ist das Dilemma: die rationale Entscheidung beider Akteure führt zu einem suboptimalen Ergebnis. Wenn man die Summe der Jahre in Haft als Gesamtresultat sieht, dann ist dieses sogar das schlechtest mögliche.

Bemerkungen Das Gefangenendilemma hat eine große Bedeutung für die Wirtschaftsethik: Es zeigt, dass die Maximierung des persönlichen Nutzens durch alle Akteure nicht unbedingt den Gesamtnutzen für die Gesellschaft maximiert: es kann diesen sogar minimieren. Das abstrakte Spiel beschreibt dabei eine Situation, die sich erstaulich häufig und in ganz verschiedenen Zusammenhängen des "wirklichen Lebens" ergeben kann. Beispiele sind:

- Das Gefangenendilemma gilt als starkes Argument gegen Kronzeugenregelungen, da die Kalkulation unabhängig von der Schuld der Verächtigen ist.
- In vielen praktischen Beispielen geht es um Ressourcenverbrauch zur Schädigung / Bedrohung von Mitbewerbern:
  - Werbung konkurierender Unternehmen bei gesättigtem Markt (Folge USA 1971: Tabak-Industrie befürwortet Werbeverbot für Zigaretten).
  - Patentschlachten in der IT-Branche mit zu diesem Zweck erworbenen Patentpaketen.
  - Rüstungswettlauf und Gleichgewicht des Schreckens.
  - Dominanz- und Revierkämpfe in der Tierwelt (und nicht nur dort).
- Steuerhinterziehung und Schwarzarbeit – wo immer das Risiko einer Bestrafung gering ist und massenhafte Hinterziehung den Staat ruiniert.
- Weite Bereiche der Umweltpolitik, zB. Regeln zum CO_2 Ausstoß zwischen Ländern oder Fangverbote bei Überfischung.
- Kartellrecht zur Verhinderung von Absprachen bei Oligopolen (zB. OPEC Ölfördermengen): mangelnde Kooperation nützt Einzelnen, aber wenn niemand sich an die Absprachen hält, werden die Preise ruiniert.
- Versteigerungen mit Bieterwettbewerben (ebay, staatliche Versteigerungen, z.B. BAWAG in Österreich).

In der Wirtschaftsethik begründen Gefangenendilemmata oft staatliches Handeln: Durch geeignete Rahmenbedingungen (z.B. Umweltgesetze) sollen unerwünschte Dilemmata vermieden werden: Stärkung von Kooperation. Andererseits sollen erwünschte Dilemmata herbeigeführt werden, z.B. im Kartellrecht: Stärkung von Wettbewerb.

Ein großer Teil der Spieltheorie befasst sich mit der Frage, wie man – trotz Gefangendilemma-Situationen – in einem erweiterten Rahmen von Strategien und Spielmöglichkeiten zu kooperativem Verhalten kommen kann - obwohl alle Akteure weiterhin (auch) nach dem Prinzip des maximierten Eigennutzes handeln. Folgende Erweierungen werden diskutiert:

- Strafen für *defectors*. Da Strafen für den "punisher" gewöhnlich kostspielig ist, braucht man allerdings auch Mechanismen, die das Strafen rational erscheinen lassen.
- Wiederholte Spielrunden: wenn man sich im Leben mehr als einmal begegnet, eröffnet dies die Gelegenheit zur Rache, die ein *defector* mit berücksichtigen muss.
- Guter Ruf: Bei wiederholtem Spiel mit verschiedenen Gegnern kann ein guter Ruf hilfreich sein, der sich durch ein mehrfaches eigenes *cooperate* in vorherigen Spielrunden aufbaut.

Insgesamt stellt sich heraus, dass die Stabilisierung von kooperativem Verhalten (als Nash-Gleichgewicht oder sogar als einziges Nash-Gleichgewicht) möglich ist – allerdings nur unter Bedingungen und keineswegs selbstverständlich.

Beim Gefangenendilemma ist die optimale Strategie beim einfachen Spiel mit einer Runde trivial. Dass dies nicht immer so ist, zeigt ein weiteres Beispiel, das vom Bergünder der evolutionären Spieltheorie John Maynard Smith vorgeschlagen wurde, um die Koexistenz von aggressivem und kooperativem Verhalten im Tierreich zu erklären.

Tauben und Falken

Warum kämpfen Tiere innerhalb einer Art meist eher zurückhaltend und nach Regeln, die schwere Verletzungen vermeiden? – Es ist keine Frage, dass dies zur Erhalt der Art beiträgt, aber das ist evolutionär kein gutes Argument. Innerhalb einer Population mit zurückhaltenden Individuen könnte aggressives Verhalten für den Einzelnen dennoch erfolgreich sein und sich so durchsetzen. Beim *Hawk and Dove* Spiel kann ein Individuum entweder eine eskalierende Falken-Startegie F oder eine de-eskalierende Tauben-Strategie T einnehmen kann. Die *payoff* Matrix ist wie folgt:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} T & F \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ F \end{array} & \begin{pmatrix} b/2 & 0 \\ b & (b-c)/2 \end{pmatrix} \end{array}. \tag{2}$$

Zwei Tauben teilen sich die Beute, ein Falke wird sie gegen eine Taube alleine behalten, zwei Falken kämpfen und zahlen dafür Kosten. Wichtig ist vor allem der Fall $c > b$, bei dem "Falke – Falke" (oder "*defect – defect*") für alle Beteiligten das schlechteste Resultat ist. Ein anerer Name für ein Spiel dieses Typs ist *chicken* (nach einem Spiel, bei dem junge Helden aus den Vorstädten mit Autos aufeinander zurasen – wer ausweicht ist ein *chicken*). Es stellt sich wieder die Frage nach der optimalen Strategie. Offensichtlich ist es immer am besten, die Strategie zu wählen, die der Gegenspieler nicht wählt (wobei man in diesem Fall allerdings lieber der "Falke" wäre).

Grundlegende Definitionen und elementare Resultate

Bisher haben wir den Fall betrachtet, dass beide Spieler genau zwei Verhaltensweisen zur Verfügung haben: "Aussagen" oder "Nicht Aussagen", bzw, "Taube" oder "Falke". Man nennt diese Verhaltensweisen in der Spieltheorie auch **reine Strategien**. Die Auszahlungsmatrix $\mathbf{A}$ eines symmetrischen 2-Personen Spiels mit N reinen Strategien (*normal form game*) ist wie folgt definiert:

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,N} \tag{3}$$

wobei a_{ij} die Auszahlung für die reine Strategie i ist, wenn der Gegenspieler die reine Strategie j spielt. Neben den reinen Strategien, die immer die gleiche Wahl treffen, gibt es sogenannte **gemischte Strategien**, die sich mit Wahrscheinlichkeit p_i für die reine Strategie i entscheiden. Eine gemischte Strategie kann durch einen Wahrscheinlichkeitsvektor $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_N)^t$ mit $\sum_i p_i = 1$ dargestellt werden. Allgemein ergibt sich der *payoff* einer gemischten Strategie $\mathbf{p}$ gegen eine Strategie $\mathbf{q}$ wieder als Skalarprodukt

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{Aq}\,. \tag{4}$$

Die Frage nach der optimalen Strategie ist nur dann leicht zu beantworten, wenn eine reine Strategie einen höheren *payoff* hat als alle anderen Strategien. Eine solche Strategie heißt *dominant*. Man sieht leicht, dass für die Dominanz von Startegie i hinreichend und notwendig ist, dass in der Auszahlungsmatrix gilt $a_{ij} > a_{kj}$ (für alle j und alle $k \neq i$). Also: in jeder Spalte der Auszahlungsmatrix $\mathbf{A}$ ist der Eintrag der Matrix in der i-ten Zeile maximal. Beim Gefangenendilemma hatten wir so gesehen, dass D über jede andere Strategie dominiert. Im allgemeinen Fall gibt es aber keine dominante Strategie und wir benötigen einen schwächeren Begriff von Optimalität. Das bedeutendste Konzept ist das des *Nash-Gleichgewichts*

- Eine Strategie heißt symmetrisches **Nash Gleichgewicht**, wenn kein Spieler durch den Wechsel der Strategie seinen *payoff* vergößern kann. Für $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$ ist $\mathbf{p}$ ein Nash Gleichgewicht, wenn

  $$\mathbf{p} \cdot \mathbf{Ap} \geq \mathbf{q} \cdot \mathbf{Ap} \tag{5}$$

  Ein symmetrisches Nash Gleichgewicht ist also immer die "beste Antwort auf sich selbst". Wenn sogar $\mathbf{p} \cdot \mathbf{Ap} > \mathbf{q} \cdot \mathbf{Ap}$ gilt, heißt das Nash Gleichgewicht *strikt* (einzige beste Antwort auf sich selbst).

- Wenn wir zunächst die reinen Strategien betrachten sehen wir leicht, dass die $i$te Strategie dann ein Nash-Gleichgewicht ist, wenn in der $i$ten Spalte der Auszahlungsmatrix der Eintrag in der i Zeile maximal ist (größer oder gleich für einfach Nash, bzw. strikt größer für ein striktes Nash-Gleichgewicht). Es ist offensichtlich, dass eine dominante Strategie immer ein striktes Nash Gleichgewicht ist – und dass die Implikation andersherum nicht gilt.

- Wir sehen auch sofort, dass ein Nash-Gleichgewicht nicht notwendigerweise eindeutig sein muss. In einer Auszahlungsmatrix zwischen N Strategien kann es bis zu N strikte Nash-Gleichgewichte gleichzeitig geben – wenn in jeder Spalte die Einträge in der Diagonalen maximal sind.

- Auf der anderen Seite sehen wir im Fall des Taube- und Falke-Spiels, dass es auch möglich ist, dass keine einzige reine Strategie ein Nash-Gleichgewicht ist. Dennoch kann man für ein 2-Personen Spiel mit N reinen Strategien zeigen, dass es immer mindestens ein (nicht unbedingt striktes) Nash Gleichgewicht gibt (siehe Hofbauer/Sigmund 1998). Dieses kann aber auch eine gemischte Strategie sein.

Intuitiv sollte man beim Taube-Falke-Spiel für den Gegner unberechenbar sein. Dies deutet bereits auf eine gemischte Strategie als Optimum hin, bei der beide Optionen zufällig gewählt werden. Das Nash-Gleichgewicht zeigt, wie die Verhältnisse gewählt werden müssen. Sei $\mathbf{p} = (1-p, p)$ und $\mathbf{q} = (1-q, q)$. Wir berechnen

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{A}\mathbf{p} = (1-p)(1-q)\frac{b}{2} + q(1-p)b + pq\frac{b-c}{2} = \frac{1}{2}\Big((1+q-p)b - pq \cdot c\Big)$$

und somit

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}\mathbf{p} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{A}\mathbf{p} = \frac{1}{2}\Big((p-q)b + p(q-p)c\Big) = \frac{(p-q)(b-pc)}{2}\,.$$

Die Bedingung für ein Nash-Gleichgewicht ist, dass dieser Ausdruck für beliebige q größer oder gleich 0 ist. Dies ist nur dann möglich, wenn wir $p = b/c$ wählen, also $\mathbf{p} = (1-b/c, b/c)$.

- Das Nash-Gleichgewicht ist nicht strikt. Aber immerhin kann der Gegenspieler durch den Wechsel der Strategie keinen Vorteil erzielen.

- Das Nash-Gleichgewicht optimiert nicht das Gemeinwohl (dies wäre bei reiner Tauben-Strategie erreicht). Aber immerhin erhält es auch einen Anteil von Kooperation im Verhalten der Population: Eskalation wird begrenzt. Im Rahmen der evolutionären Spieltheorie kann man darüber hinaus zeigen, dass das Nash-Gleichgewicht in diesem Fall tatsächlich durch Evolution erreicht wird, wenn Mutationen zu einer schrittweisen "Anderung der Strategie führen.

- Das Beispiel erkärt auch ein in der Natur beobachtetes Muster: Bei mit starken Waffen ausgestatteten Tieren (Hörner, Geweihe), die hohe Kosten verursachen (hohes c) sind Konkurrenzkämpfe seltener als bei Tieren ohne solche Waffen.